SISTEM KUBIT GANDA PADA PERMUKAN BOLA EKSOTIK

Caesnan Marendra Grahan Leditto[1]
[1] FISKOM, Universitas Kristen Immanuel
email: caesnan@ukrimuniversity.ac.id

Abstract

Bipartite qubit system is a simple quantum system that can be applied in quantum computer. Consideration of bipartite qubit system can be viewed geometrically by using quaternionic Hopf fibration, which the total space is seven dimensional sphere. Then, seven dimensional sphere is related to exotic sphere. The entanglement feature of this formulation is also described.

Keywords: *Quantum computer, exotic sphere, quaternionic quantum mechanics, bipartite qubit system, entanglement*

1. PENDAHULUAN

Komputer kuantum merupakan teknologi masa depan yang mampu membawa perubahan besar dalam sejarah umat manusia. Prinsip kerja komputer kuantum dilandaskan pada mekanisme sistem kuantum. Dengan demikian, memahami sistem kuantum merupakan jalan masuk penting membangun komputer kuantum.

Komputer kuantum digadang-gadang memiliki kecepatan yang melampau kecepatan super komputer. Sayangnya, justifikasi untuk kecepatan komputer kuantum belum diberikan hingga saat ini. Potensi untuk memberikan sumbangsih pada ranah ini masih cukup besar. Apabila perumusan kecepatan komputer kuantum bisa diberikan, temuan tersebut akan menentukan kelayakan komputer kuantum di masa yang akan datang.

Merumuskan kecepatan komputer kuantum terkait erat dengan evolusi sistem kuantum yang membangun komputer kuantum, yaitu sistem kubit. Kajian mengenai kecepatan evolusi kuantum pertama kali diberikan oleh Margolus dan Levitin[1]. Perumusan mereka sangat terkait dengan ketakpastian energi waktu Mandlestam-Tamm yang sebelumnya diajukan oleh Bahattacharyya[2]. Anandan dan Aharonov[3] memberikan kaitan ketakpastian energi-waktu tersebut dengan geometri pada ruang Hilbert proyektif dari sistem kuantum yang ditinjau. Dengan menggunakan cara pandang geometri ini, kaitan mekanika klasik dan kuantum menjadi cukup erat sehingga terdapat jembatan bagi kedua teori ini.

Penelitian ini mengaji sistem dasar yang membangun komputer kuantum, yaitu sistem kubit ganda. Dengan menggunakan prosedur geometrisasi dan cara pandang mekanika kuantum kuaternionik, perumusan limit kecepatan kuantum dapat diberikan.

Beberapa publikasi yang terkait dengan permasalahan ini antara lain: Pendekatan perumusan geometrik batas kecepatan kuantum berdasarkan konsep jarak statistik oleh Jones dan Kok[4]; penerapan evolusi geometrik Anandan-Aharonov pada sistem kubit yang terbelit untuk mencari waktu minimum dikerjakan oleh Pati, Pradhan, dan Agrawal[5]; Perumuman perumusan limit kecepatan kuantum geometrik diterapkan pada sistem kuantum terbuka dengan menggabungkan pendekatan ketakpastian energi-waktu Mandelstam-Tamm dan Margolus-Levitin diberikan oleh Deffner dan Lutz[6]; Pada kasus yang meninjau sistem ensembel kuantum keadaan tercampur (*mixed state*), Andersson dan Heydari[7] juga merumuskan ketakpastian energi-waktu secara geometrik; Mondal dan Pati[8] menggunakan metrik baru, sedemikian rupa sehingga dihasilkan batasan yang lebih ‘ketat’ pada perumusan limit kecepatan kuantum dibandingkan yang diberikan oleh Mandelstam-Tamm dan Margolus-Levitin.

2. SISTEM KUBIT TUNGGAL PADA PERMUKAAN BOLA BLOCH

Sistem kubit ganda adalah salah satu sistem kuantum gabungan. Pada umumnya, keadaan sistem kubit digambarkan secara geometris menggunakan permukaan bola Bloch. Misalkan keadaan kuantum sistem kubit diberikan sebagai berikut

$$|\psi\rangle \coloneqq \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (1)$$

dengan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Operator kerapatan (*density operator*) bagi sistem ini diberikan dalam bentuk

$$\rho \coloneqq |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}) \qquad (2)$$

dengan $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ adalah vector Bloch dan $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ adalah matriks Pauli. Berdasarkan sifat operator keadaan, yaitu

$$\mathrm{Tr}[\rho^2] = 1 \qquad (3)$$

keadaan sistem kubit harus mensyaratkan $|\vec{r}| = 1$. Syarat tersebut menggambarkan sebuah permukaan bola, yang disebut permukaan bola Bloch. Dalam parameter sudut (θ, ϕ), vektor Bloch dituliskan sebagai $\vec{r} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, sehingga keadaan kuantum sistem kubit diberikan sebagai berikut

$$|\psi\rangle := e^{-\frac{i\varphi}{2}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\right) \quad (4)$$

Situasi menarik muncul ketika mengidentifikasi permukaan bola Bloch sebagai ruang dasar (*base space*) bagi penyeratan Hopf kompleks (*complex Hopf bundle*). Gagasan tersebut pertama kali diungkapkan oleh Urbantke. Untingan Hopf kompleks terdiri dari ruang total (*total space*) berupa permukaan bola S^3, ruang dasar berupa permukaan bola $S^2 \cong \mathbb{C}P$, serat yang diberikan oleh lingkaran $S^1 \cong U(1)$, dan proyeksi kanonis

$$\pi_{\mathbb{C}}: S^3 \to S^2$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto (|\alpha|^2 - |\beta|^2, 2\,\beta\bar{\alpha}). \quad (5)$$

Melalui identifikasi titik-titik S^2 dengan permukaan bola Bloch diparameterisasi oleh titik $(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$,

$$\xi_0 = \langle\sigma_1\rangle_\psi = \sin\theta\cos\varphi = 2\,\mathcal{Re}(\beta\bar{\alpha}),$$
$$\xi_1 = \langle\sigma_2\rangle_\psi = \sin\theta\sin\varphi = 2\,\mathcal{Im}(\beta\bar{\alpha}),$$
$$\xi_3 = \langle\sigma_3\rangle_\psi = \cos\theta = |\alpha|^2 - |\beta|^2. \quad (6)$$

dan operator kerapatan yang terkait dengan keadaan murni (*pure state*) sistem kubit tunggal dinyatakan dalam wakilan matriks sebagai berikut

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + |\alpha|^2 + |\beta|^2 & 2\left(\mathcal{Re}(\beta\bar{\alpha}) - i\,\mathcal{Im}(\beta\bar{\alpha})\right) \\ 2\left(\mathcal{Re}(\beta\bar{\alpha}) + i\,\mathcal{Im}(\beta\bar{\alpha})\right) & 1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Dengan sudut pandang ini, ruang Hilbert $\mathcal{H}^2$ merupakan keragaman Hilbert (*Hilbert manifold*) yang disepadankan dengan permukaan bola S^3; sedangkan serat (*fiber*) bagi untingan Hopf kompleks ini merupakan fase global $e^{-i\varphi/2} \in U(1)$ yang diparameterisasi oleh φ. Dengan demikian, anggota pada ruang Hilbert proyektif, yang adalah permukaan bola Bloch, merupakan himpunan kelas kesetaraan keadaan $[|\psi\rangle]$ yang mengidentifikasikan keadaan yang hanya berbeda fase global.

3. GEOMETRI SISTEM KUBIT GANDA PADA PERMUKAAN BOLA EKSOTIK

Sistem kubit ganda merupakan sistem gabungan dari dua sistem kubit tunggal, yang dilambangkan sebagai kubit-A dan kubit-B. Keadaan pada sistem tersebut dalam ruang Hilbert $\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2$ dapat dinyatakan sebagai

$$|\psi^{AB}\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle, \; |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1 \quad (8)$$

dengan $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Dengan meninjau bahwa suatu keadaan dikatakan terpisahkan (*separable*) apabila dipenuhi syarat penguraian

$$|\psi^{AB}\rangle = |\phi^A\rangle \otimes |\varsigma^B\rangle \quad (9)$$

dan dikatakan terbelit (*entangled*) apabila syarat tersebut tidak dapat dipenuhi, maka keadaan yang diberikan oleh persamaan di atas terpisahkan jika dipenuhi

$$ad = bc.$$

Kuantitas yang cukup penting terkait dengan sistem terbelit adalah ukuran keterbelitan (*entanglement measure*) yang mampu mengarakterisasi derajat keterbelitan pada sistem tersebut. Salah satu yang cukup sering digunakan sebagai ukuran keterbelitan adalah entropi von-Neumann. Pada sistem kubit ganda, entropi von-Neumann $\mathrm{Ent}(\rho)$ untuk sub-sistem-i, dengan i=A,B, diberikan sebagai berikut

$$\mathrm{Ent}(\rho^i) = -\mathrm{tr}[\rho^i]\log_2\rho^i = -\sum_{\lambda^i \neq 0, \mu=1}^{N} \lambda^i_\mu \log_2 \lambda^i_\mu,$$

λ_μ adalah swanilai bagi matriks operator kerapatan ρ, atau disebut vektor Schmidt, dan Nadalah jumlah swanilai tak-nol bagi ρ. Penerapan operasi lacak panggu (*partial trace operator*) pada sistem kubit ganda ini memberikan dua operator kerapatan, yaitu

$$\rho^A = \mathrm{tr}_B[|\psi^{AB}\rangle\langle\psi^{AB}|] = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ \bar{a}c + \bar{b}d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\rho^B = \mathrm{tr}_A[|\psi^{AB}\rangle\langle\psi^{AB}|] = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & a\bar{b} + c\bar{d} \\ \bar{a}b + \bar{c}d & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

yang memiliki determinan

$$\det[\rho^A] = \det[\rho^B] = \frac{1}{4}\mathcal{C}^2 \quad (12)$$

dengan

$$\mathcal{C} := 2\,|ad - bc| \quad (13)$$

yang disebut sebagai persetujuan (*concurrence*) oleh Wooters. Rentang nilai bagi persetujuan adalah $0 \leq \mathcal{C} \leq 1$, yang menyatakan bahwa untuk $\mathcal{C} = 0$ keadaan sistem kubit ganda terpisahkan, sedangkan untuk $\mathcal{C} = 1$ keadaan tersebut terbelit maksimal (*maximally entangled*).

Melalui penguraian simplektik yaitu

$$q_0 = x_0 + y_0 i + z_0 j + w_0 k = a + bj$$

$$q_1 = x_1 + y_1 i + z_1 j + w_1 k \ = \ c + dj,$$

dengan

$$a \ = \ x_0 + y_0 i \text{ dan } b \ = \ z_0 - w_0 i;$$

$$c \ = \ x_1 + y_1 i \text{ dan } d \ = \ z_1 - w_1 i,$$

serta berdasarkan persamaan D dan pemetaan Hopf kuaternionik

$$\pi_{\mathbb{H}} \colon \ S^7 \to \ S^4$$

$$(q_0, q_1) \mapsto (|q_0|^2 \ - |q_1|^2, 2\, q_1 \overline{q_0}).$$

untingan Hopf kuaternionik terbentuk. Jadi, geometri ruang Hilbert sistem kubit ganda $\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2$ adalah permukaan bola S^7dan merupakan ruang total bagi untingan Hopf kuaternionik.

Pengajian oleh Mosseri-Dandoloff [11] memerikan proyeksi kanonis $\pi_{\mathbb{H}}$ sebagai dua komposisi pemetaan, yaitu

$$\pi_{\mathbb{H}} \ = \varrho^{-1} \circ \ h : \ S^7 \to \mathbb{R}^4 \cup \infty \cong \mathbb{H} \to S^4 \cong \mathbb{H}P$$
$$\underbrace{(q_0, q_1)}_{|q_0|^2 + |q_1|^2 = 1} \ \mapsto \underbrace{\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}_{\zeta = \frac{(q_1 \overline{q_0})}{(|q_1|^2)}} \mapsto \underbrace{(\xi_0, \xi) = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}_{=(|q_0|^2 - |q_1|^2, 2\, q_1 \overline{q_0})} \tag{14}$$

dengan h merupakan pemetaan penyekawanan (*conjugation*) dan pembagian kuaternion, sedangkan ϱ^{-1} merupakan pemetaan stereografik balikan (*inverse stereographic map*), s. r. s.

$$\varrho^{-1}(\zeta) \ := \ (\xi_0, \xi) := \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 + |\zeta|^2}, \frac{2\zeta}{1 + 1 + |\zeta|^2} \right) \tag{15}$$

Kemudian, jika didefinisikan dalam wakilan sudut

$$\sin \Theta \ \tilde{\zeta} := \frac{2\zeta}{1 + |\zeta|^2}, \tag{16}$$

$$\cos \Theta := \frac{(1 - |\zeta|^2\}}{1 + |\zeta|^2}. \tag{17}$$

dengan merupakan normalisasi ζ menjadi kuaternion satuan; maka,

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \ \frac{|\zeta|}{\sqrt{1 + |\zeta|^2}} = |q_1| \, , \tag{18}$$

$$\cos \frac{\Theta}{2} = \ \frac{1}{\sqrt{1 + |\zeta|^2}} \ = |q_0| \tag{19}$$

sedemikian rupa sehingga bilangan $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbb{R}^5$ yang memarameterisasi titik di S^4 diberikan sebagai

$$\xi_0 = \cos \Theta \ = \ (\,|a|^2 + |b|^2) - (|c|^2 + |d|^2)$$

$$\xi_1 \ = \sin \Theta \, \mathrm{Scal}(\tilde{\zeta}) = 2\, \mathcal{Re}(\bar{a}c + \bar{b}d) \ = \mathcal{Re}(\alpha),$$

$$\xi_2 = \sin \Theta \ \mathrm{Vect}_i(\tilde{\zeta}\,) \ \ = \ 2\, \mathcal{Im}(\bar{a}c + \bar{\bar{b}}d) \\ = \mathcal{Im}(\alpha),$$

$$\xi_3 \ = \sin \Theta \, \mathrm{Vect}_j(\tilde{\zeta}\,) \ \ = \ 2\, \mathcal{Re}(ad - bc) \\ = \mathcal{Re}(\beta),$$

$$\xi_4 \ = \sin \Theta \ \ \mathrm{Vect}_k(\tilde{\zeta}\,) = \ 2\, \mathcal{Im}(ad - bc) \\ = \mathcal{Im}(\beta), \tag{20}$$

Persetujuan $\mathcal{C}$ kini dapat dituliskan sebagai

$$\mathcal{C} \ = \sqrt{|\xi_3|^2 \ + |\xi_4|^2} \ = |\beta|. \tag{21}$$

4. KESIMPULAN

Sistem kubit ganda merupakan dasar penelaahan komputer kuantum sederhana. Dengan menggunakan penggambaran untingan Hopf kuaternionik yang setara homeomorfis dengan permukaan bola eksotik, bentuk yang sama dapat digambarkan secara geometris seperti sistem kubit tunggal. Hal ini membuka peluang besar bagi sistem kubit ganda untuk diterapkan geometrisasi mekanika kuantum kuaternionik.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Tim peneliti mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Kemenristek DIKTI atas diberikannya hibah penelitian desentralisasi dengan skema Penelitian Dosen Pemula. Serta, kami mengucapkan terima kasih kepada Rektor UKRIM dan Dekan FISKOM yang mendukung selam berlangsungnya penelitian ini dengan penyediaan fasilitas-fasilitas. Yang terakhir, kepada teman sejawat dosen FISKOM yang memberikan update informasi tentang perkembangan penelitian saat ini.

6. REFERENSI

[1] Margolus, N. & Levitin, L. B. 2008. The maximum speed of dynamical evolution. *Phys. D* **120,** 188–195.

[2] Bhattacharyya, K. 1983. Quantum decay and the Mandelstam-Tamm time-energy inequality. *J. Phys. A. Math. Gen.* **16,** 2993–2996.

[3] Anandan, J. & Aharonov, Y. Geometry of Quantum Evolution. *Phys. Rev. Lett.* **65,** 1697–1700 (1990).

[4] Jones, P. J. & Kok, P. 2010. Geometric derivation of the quantum speed limit. *Phys. Rev. A* **82,** 022107–1–022107–7.

[5] Pati, A. K., Pradhan, B. & Agrawal, P. 2012. Entangled brachistochrone: Minimum time to reach the target entangled state. *Quantum Inf. Process.* **11,** 841–851.

[6] Deffner, S. & Lutz, E. 2013. Quantum Speed Limit for Non-Markovian Dynamics. *Phys. Rev. Lett.* **111,** 1–5.

[7] Andersson, O. & Heydari, H. 2014.

Geometric uncertainty relation for mixed quantum states. *J. Math. Phys.* **55,** 1–11.

[8] Mondal, D. & Pati, A. K. 2016. Quantum speed limit for mixed states using an experimentally realizable metric. *Phys. Lett. A* **380,** 1395–1400.

[9] Adler, S. 1995. *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields*. Oxford University Press, Inc. USA.

[10] Ashtekar, A. & Schilling, T. A. 1999. in *On Einstein's Path* (ed. Harvey, A.) 23–65 Springer, Berlin.

[11] Dandoloff, R. & Mosseri, R. 2001. Geometry of entangled states , Bloch spheres and Hopf fibrations. *J. Phys. A Math. Gen.* **34,** 10243–10252.